

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Пекаревский Борис Владимирович
Должность: Проректор по учебной и методической работе
Дата подписания: 06.06.2022 15:36:10
Уникальный программный ключ:
3b89716a1076b80b2c167df0f27c09d01782ba84



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»
(СПбГТИ(ТУ))

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной и методической работе
_____ Б. В. Пекаревский

«___» _____ 2019 г.

Рабочая программа дисциплины

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Направление подготовки

15.03.03 Прикладная механика

Направленность программы

Динамика и прочность машин и аппаратуры

Квалификация

Бакалавр

Форма обучения

очная

Факультет **механический**

Кафедра **механики**

Санкт-Петербург

2019

Б1.В.07

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ

Должность	Подпись	Ученое звание, фамилия, инициалы
Разработчик		Доцент А.А Кузьмин

Рабочая программа дисциплины «Основы теории упругости» обсуждена на заседании кафедры механики
протокол от «__» _____ 2019 № __

Заведующий кафедрой

Н.А.Марцулевич

Одобрено учебно-методической комиссией механического факультета
протокол от «__» _____ 2019 № __
Председатель

А.Н.Луцко

СОГЛАСОВАНО

Руководитель направления подготовки «Прикладная механика»		профессор Н.А.Марцулевич
Директор библиотеки		Т.Н.Старостенко
Начальник методического отдела учебно-методического управления		Т.И.Богданова
Начальник УМУ		С.Н.Денисенко

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	04
2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы	04
3. Объем дисциплины	05
4. Содержание дисциплины	
4.1. Разделы дисциплины и виды занятий	05
4.2. Занятия лекционного типа	06
4.3. Занятия семинарского типа	06
4.3.1. Семинары, практические занятия	06
4.3.2. Лабораторные занятия	07
4.4. Самостоятельная работа	07
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине	07
6. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации	07
7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	08
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины	08
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	09
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине	
10.1. Информационные технологии	09
10.2. Программное обеспечение	09
10.3. Базы данных и информационные справочные системы	09
11. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине	09
12. Особенности освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья	09
Приложения: 1. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации.	
2. Пример расчета и варианты индивидуальных заданий.	

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

В результате освоения образовательной программы бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Коды компетенции	Результаты освоения ООП (содержание компетенций)	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
ПК-3	готовность выполнять научно-исследовательские работы и решать научно-технические задачи в области прикладной механики на основе достижений техники и технологий, классических и технических теорий и методов, физико-механических, математических и компьютерных моделей, обладающих высокой степенью адекватности реальным процессам, машинам и конструкциям	<p>Знать: основные уравнения, условия, принципы, понятия и теоремы теории упругости; особенности решения задач в прямоугольных и полярных координатах.</p> <p>Уметь: выполнять расчеты напряженно-деформированного состояния тел простейшей геометрической формы (брус, пластина и т.д.) при типовых видах нагружения;</p> <p>Владеть: методами расчета напряженно-деформированного состояния элементов составляющих сооружение или конструкцию</p>

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы¹.

Дисциплина относится к обязательным дисциплинам вариативной части (Б1.В.07) и изучается на 3 курсе.

В методическом плане дисциплина опирается на элементы компетенций, сформированные при изучении дисциплин «Сопротивление материалов», «Теоретическая механика», «История механики».

Полученные в процессе изучения дисциплины «Основы теории упругости» знания, умения и навыки могут быть использованы при выполнении выпускной квалификационной работы.

3. Объем дисциплины.

Вид учебной работы	Всего, академических часов
	заочная форма обучения
Общая трудоемкость дисциплины (зачетных единиц/ академических часов)	5/ 180
Контактная работа с преподавателем:	92

¹ Место дисциплины будет учитываться при заполнении таблицы 1 в Приложении 1 (Фонд оценочных средств)

Вид учебной работы	Всего, академических часов
	заочная форма обучения
занятия лекционного типа	34
занятия семинарского типа, в т.ч.	52
семинары, практические занятия	34
лабораторные работы	18
курсовое проектирование (КР или КП)	-
КСР	6
другие виды контактной работы	-
Самостоятельная работа	52
Форма текущего контроля (Кр, реферат, РГР, эссе)	2 Кр
Форма промежуточной аттестации (КР, КП, зачет, экзамен)	Зачет, экзамен (36)

4. Содержание дисциплины.

4.1. Разделы дисциплины и виды занятий.

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Занятия лекционного типа, акад. часы	Занятия семинарского типа, академ. часы		Самостоятельная работа, акад. часы	Формируемые компетенции
			Семинары и/или практические занятия	Лабораторные работы		
1.	Плоское напряженное состояние и плоская деформация	2	6	4	7	ПК-3
2.	Двумерные задачи в полярных координатах	6	6	-	6	ПК-3
3.	Анализ напряжений и деформаций в пространственном случае	12	6	4	10	ПК-3
4.	Общие теоремы	4	4	4	4	ПК-3
5.	Изгиб пластин	4	6	6	14	ПК-3
6.	Метод конечных элементов	6	6	-	11	ПК-3

4.2. Занятия лекционного типа.

№ раздела дисциплины	Наименование темы и краткое содержание занятия	Объем, акад. часы	Инновационная форма
1	<p><u>Плоское напряженное состояние и плоская деформация</u> Цель и задачи курса. Основные гипотезы и допущения линейной теории упругости. Напряжения и деформации. Обобщенный закон Гука. Дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия. Уравнения совместности деформаций. Плоское напряженное состояние и плоская деформация. Построение кругов Мора. Функция напряжений. Решение в полиномах. Концевые эффекты, принцип Сен-Венана. Метод наложения. Изгиб консоли, нагруженной сосредоточенной силой Изгиб балки равномерной нагрузкой.</p>	6	
2	<p><u>Двумерные задачи в полярных координатах.</u> Двумерные задачи теории упругости в полярных координатах. Общие уравнения в полярных координатах. Осесимметричное распределение напряжений. Чистый изгиб кривых брусьев. Напряжения во вращающемся диске. Распределение напряжений вблизи отверстий.</p>	6	
3	<p><u>Анализ напряжений и деформаций в пространственном случае.</u> Главные напряжения. Инварианты напряжений. Однородная деформация. Главные оси деформаций.</p>	4	
4	<p><u>Общие теоремы теории упругости.</u> Дифференциальные уравнения равновесия. Условия совместности. Принцип суперпозиции. Энергия деформации. Теорема Кастильяно. Принцип минимальной работы.</p>	6	
5	<p><u>Изгиб пластин.</u> Общие уравнения. Изгиб круглой пластины. Чистый изгиб пластин. Мембранная аналогия. Сила, действующая в точке бесконечной пластины. Влияние круглого отверстия на распределение напряжений в пластине.</p>	6	

№ раздела дисциплины	Наименование темы и краткое содержание занятия	Объем, акад. часы	Инновационная форма
6	Метод конечных элементов. Вывод конечно-разностных уравнений. Методы последовательных приближений. Метод релаксации. Кручение круглых валов переменного диаметра.	6	

4.3. Занятия семинарского типа.

4.3.1. Семинары, практические занятия.

№ раздела дисциплины	Наименование темы и краткое содержание занятия	Объем, акад. часы	Инновационная форма
4	Общие теоремы. Решение задачи об узловых перемещениях треугольной фермы энергетическими методами Решение задач по усмотрению преподавателя.	12	-
2	Двумерные задачи в полярных координатах. Двумерные задачи теории упругости в полярных координатах. Общие уравнения в полярных координатах. Осесимметричное распределение напряжений. Чистый изгиб кривых брусьев. Напряжения во вращающемся диске. Распределение напряжений вблизи отверстий.	12	
6	Метод конечных элементов. Вывод конечно-разностных уравнений. Методы последовательных приближений. Метод релаксации. Кручение круглых валов переменного диаметра.	10	

4.3.2. Лабораторные занятия.

№ раздела дисциплины	Наименование темы и краткое содержание занятия	Объем, акад. часы	Примечание
6	<u>Метод конечных элементов.</u> Экспериментальное определение перемещений в стержнях переменного сечения.	18	

4.4. Самостоятельная работа обучающихся.

№ раздела дисциплины	Перечень вопросов для самостоятельного изучения	Объем, акад. часы	Форма контроля
1	Расчет напряженно-деформированного состояния консольной балки методами сопротивления материалов	8	Устный опрос №1
2	Расчет напряженно-деформированного состояния толстостенного цилиндра.	8	Устный опрос №2
1,2	Определение напряжений и перемещений в балке и цилиндре с использованием компьютерной техники.	8	Устный опрос №3
3	Анализ напряженно-деформированного состояния консольной балки и толстостенного цилиндра с использованием кругов Мора.	8	Устный опрос №4
6	Выполнение расчетно-графической работы методом конечных элементов.	10	Защита РГР
6	Расчет стержня переменного сечения аналитическим методом.	10	Защита РГР

5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине.

Методические указания для обучающихся по организации самостоятельной работы по дисциплине, включая перечень тем самостоятельной работы, формы текущего контроля по дисциплине и требования к их выполнению размещены в электронной информационно-образовательной среде СПбГТИ(ТУ) на сайте Медиа: <http://media.technolog.edu.ru>

6. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Своевременное выполнение обучающимся мероприятий текущего контроля позволяет превысить (достигнуть) пороговый уровень («удовлетворительно») освоения предусмотренных элементов компетенций.

Результаты дисциплины считаются достигнутыми, если для всех элементов компетенций превышен (достигнут) пороговый уровень освоения компетенции на данном этапе.

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме зачета и экзамена по всему курсу.

К сдаче зачета и экзамена допускаются студенты, выполнившие все формы текущего контроля.

Экзамен предусматривает умение студентов решать задачи в объеме пройденного материала, выборочную проверку освоения предусмотренных элементов компетенций и комплектуется вопросами (заданиями) двух видов: теоретический вопрос (для проверки знаний) и комплексная задача (для проверки умений и навыков).

При сдаче экзамена студент получает три вопроса из перечня вопросов, время подготовки студента к устному ответу - до 45 мин.

Вариант № 1

1. Напряжения, деформации и перемещения в упругом теле.
2. Давление между двумя соприкасающимися сферическими телами.
3. Задача.

Фонд оценочных средств по дисциплине представлен в Приложении № 1

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

1. Кузьмин, А.А. Расчет стержня переменного сечения: учебное пособие / А.А. Кузьмин, Э.А. Павлова—.: Изд-во СПб ГТИ(ТУ), 2016,--26с.

б) дополнительная литература:

1. Кузьмин А.А. Решение задач по сопротивлению материалов энергетическими методами: методические указания / А.А. Кузьмин – СПб.: СПб ГТИ(ТУ). 2010.- 16с.

2. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов с использованием вычислительных комплексов: в двух книгах / Е.Г. Макаров.- М.: высш. шк., 2009 Кн.1: Основной курс: учебное пособие для вузов по направлениям подготовки специальностям в области техники и технологии.- 406с.

в) вспомогательная литература:

1. Александров А.В. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности: Учебник для строительных спец. Вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – 2-е изд., испр.- М.; Высш. шк., 2002.-399с.

2. Васильев В.З. Краткий курс сопротивления материалов с основами теории упругости: учебное пособие / В.З. Васильев.- СПб.: Иван Федоров, 2001.- 256с.

3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: учебник для вузов / В.И. Феодосьев. – 11-е изд., стер.. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2003. – 591с.

4. Тимошенко С.П. Теория упругости: учебник для вузов / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

5. Бартенев Д.А. Основы метода конечных элементов: учебное пособие для студентов механических специальностей / Д.А. Бартенев, Н.А. Марцулевич, О.В. Сташевская. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2008.- 30с.

6. Варданян Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник для вузов / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. - М.: АСВ, 1995. – 358 с.

8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

учебный план, РПД и учебно-методические материалы:
<http://media.technolog.edu.ru>

электронно-библиотечные системы:

«Электронный читальный зал – БиблиоТех» <https://technolog.bibliotech.ru/>;

«Лань» <https://e.lanbook.com/books/>.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Все виды занятий по дисциплине «Теория упругости» проводятся в соответствии с требованиями следующих СТП:

СТО СПбГТИ 020-2011. КС УКДВ. Виды учебных занятий. Лабораторные занятия. Общие требования к организации и проведению.

СТП СПбГТИ 040-02. КС УКДВ. Виды учебных занятий. Лекция. Общие требования;

СТО СПбГТИ 018-2014. КС УКДВ. Виды учебных занятий. Семинары и практические занятия. Общие требования к организации и проведению.

СТП СПбГТИ 048-2009. КС УКДВ. Виды учебных занятий. Самостоятельная планируемая работа студентов. Общие требования к организации и проведению.

СТП СПбГТИ 016-2014. КС УКДВ. Порядок проведения зачетов и экзаменов.

Планирование времени, необходимого на изучение данной дисциплины, лучше всего осуществлять на весь семестр, предусматривая при этом регулярное повторение

пройденного материала.

Основными условиями правильной организации учебного процесса для студентов является:

- плановость в организации учебной работы;
- серьезное отношение к изучению материала;
- постоянный самоконтроль.

На занятия студент должен приходить, имея багаж знаний и вопросов по уже изученному материалу.

10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

10.1. Информационные технологии.

В учебном процессе по данной дисциплине предусмотрено использование информационных технологий:

- чтение лекций с использованием слайд-презентаций;
- взаимодействие с обучающимися посредством электронной информационно-образовательной среды.

10.2. Программное обеспечение.

Microsoft Office (Microsoft Excel);

10.3. Базы данных и информационно-справочная система.

Справочно-поисковая система «Консультант-Плюс»

11. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для ведения лекционных и практических занятий используется аудитория, оборудованная средствами оргтехники, на 15 посадочных мест.

Для проведения лабораторных занятий используется лаборатория, оснащенная специальным оборудованием.

12. Особенности освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями учебный процесс осуществляется в соответствии с Положением об организации учебного процесса для обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья СПбГТИ (ТУ), утвержденным ректором 28.08.2014г.

**Фонд оценочных средств
для проведения промежуточной аттестации по
дисциплине «Теория упругости»**

1. Перечень компетенций и этапов их формирования.

Компетенции		
Индекс	Формулировка	Этап формирования
ПК-3	готовность выполнять научно-исследовательские работы и решать научно-технические задачи в области прикладной механики на основе достижений техники и технологий, классических и технических теорий и методов, физико-механических, математических и компьютерных моделей, обладающих высокой степенью адекватности реальным процессам, машинам и конструкциям	промежуточный

2. Показатели и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования, шкала оценивания.

Показатели оценки результатов освоения дисциплины	Планируемые результаты	Критерий оценивания	Компетенции
Освоение раздела № 1	Знает методы расчета и анализа плоского напряженно-деформированного состояния. Умеет решать конкретные задачи.	Правильные ответы на вопросы №1-12, 29-31 к экзамену.	ПК-3
Освоение раздела №2	Знает методы решения задач о плоском напряженно-деформированном состоянии в полярных координатах и умеет выполнять расчет толстостенного цилиндра, кривого бруса и других объектов.	Правильные ответы на вопросы №13-16, 32 к экзамену.	ПК-3
Освоение раздела № 3	Знает особенности расчета и анализа трехмерного напряженно-деформированного состояния.	Правильные ответы на вопрос №17 к экзамену.	ПК-3
Освоение раздела №4	Знает энергетические методы и способы их применения. Умеет решать	Правильные ответы на вопросы №18-	ПК-3

Показатели оценки результатов освоения дисциплины	Планируемые результаты	Критерий оценивания	Компетенции
	задачи с применением теоремы Кастильяно, интеграла Мора и метода Верещагина.	21, 33 к экзамену.	
Освоение раздела № 5	Знает теорию изгиба пластин. Умеет выполнять расчет прямоугольной и круглой пластин.	Правильные ответы на вопросы №22-25, 34 к экзамену	ПК-3
Освоение раздела № 6	Знает основы метода конечных элементов. Умеет формировать матрицу жесткости. Владеет методами расчета напряженно-деформированного состояния элементов	Правильные ответы на вопросы №26-28, 35 к экзамену.	ПК-3

Шкала оценивания соответствует СТО СПбГТИ(ТУ):

Если по дисциплине промежуточная аттестация проводится в форме экзамена и (или) курсового проекта (работы), то шкала оценивания – балльная.

3. Типовые контрольные задания для проведения промежуточной аттестации.

а) Вопросы для оценки знаний, умений и навыков, сформированных у студента по компетенции ПК-3:

1. Основные цели и задачи курса «Основы теории упругости». Отличие и связь со строительной механикой и сопротивлением материалов.
2. Гипотезы и допущения линейной теории упругости.
3. Напряжения, деформации и перемещения в упругом теле.
4. Обобщенный закон Гука.
5. Уравнения равновесия и граничные условия.
6. Условия совместности деформаций.
7. Плоское напряженное состояние и плоская деформация.
8. Функция напряжений.
9. Решение в полиномах.
10. Принцип Сен-Венана, концевые эффекты, метод наложения.
11. Изгиб консоли сосредоточенной силой.
12. Изгиб балки распределенной нагрузкой.
13. Двумерные задачи в полярных координатах. Общие уравнения.
14. Чистый изгиб кривых брусев..
15. Напряжения во вращающихся дисках.
16. Распределение напряжений.
17. Анализ напряженно-деформированного состояния в пространственных задачах.
18. Энергия упругих деформаций. Принцип виртуальной работы.
19. Энергия упругих деформаций. Теорема Кастильяно.
20. Напряжения и деформации в телах вращения. Решение в полиномах.
21. Давление между двумя соприкасающимися сферическими телами.
22. Основы технической теории изгиба пластин.
23. Изгиб прямоугольных пластин.

24. Изгиб кольцевых пластин.
25. Связь заделки и граничных условий.
26. Понятие о методе конечных элементов.
27. Формирование матрицы жесткости.
28. Особенности применения метода конечных элементов при решении задач упругости и дисперсии.
29. Решение задачи об изгибе консольной балки прямоугольного сечения равномерно-распределенной нагрузкой.
30. Расчет плотины треугольного поперечного сечения под действием гидростатического давления.
31. Расчет плотины треугольного поперечного сечения под действием гидростатического давления и собственного веса.
32. Расчет толстостенного цилиндра под действием внутреннего давления.
33. Определение узловых перемещений треугольной фермы энергетическими методами.
34. Расчет прямоугольной шарнирно-опертой пластины под действием равномерно-распределенной нагрузки.
35. Расчет стержня переменного сечения методом конечных элементов.

4. Методические материалы для определения процедур оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в соответствии с требованиями СПб

СТО СПбГТИ(ТУ) 016-2015. КС УКВД. Порядок проведения зачетов и экзаменов.

Приложение 2
к рабочей программе дисциплины

Примеры контрольных задач

Рассмотрим конкретный пример. Стержень, представленный на рисунке имеет размеры $2\ell = 1000$ мм, $A = 100$ мм². На стержень действует сила $F = 10$ кН и он изготовлен из стали Ст.3 ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma] = 160$ МПа). Требуется методом конечных элементов проверить выполнение условия прочности, жесткости, построить эпюру перемещений и сравнить полученное решение с аналитическим.

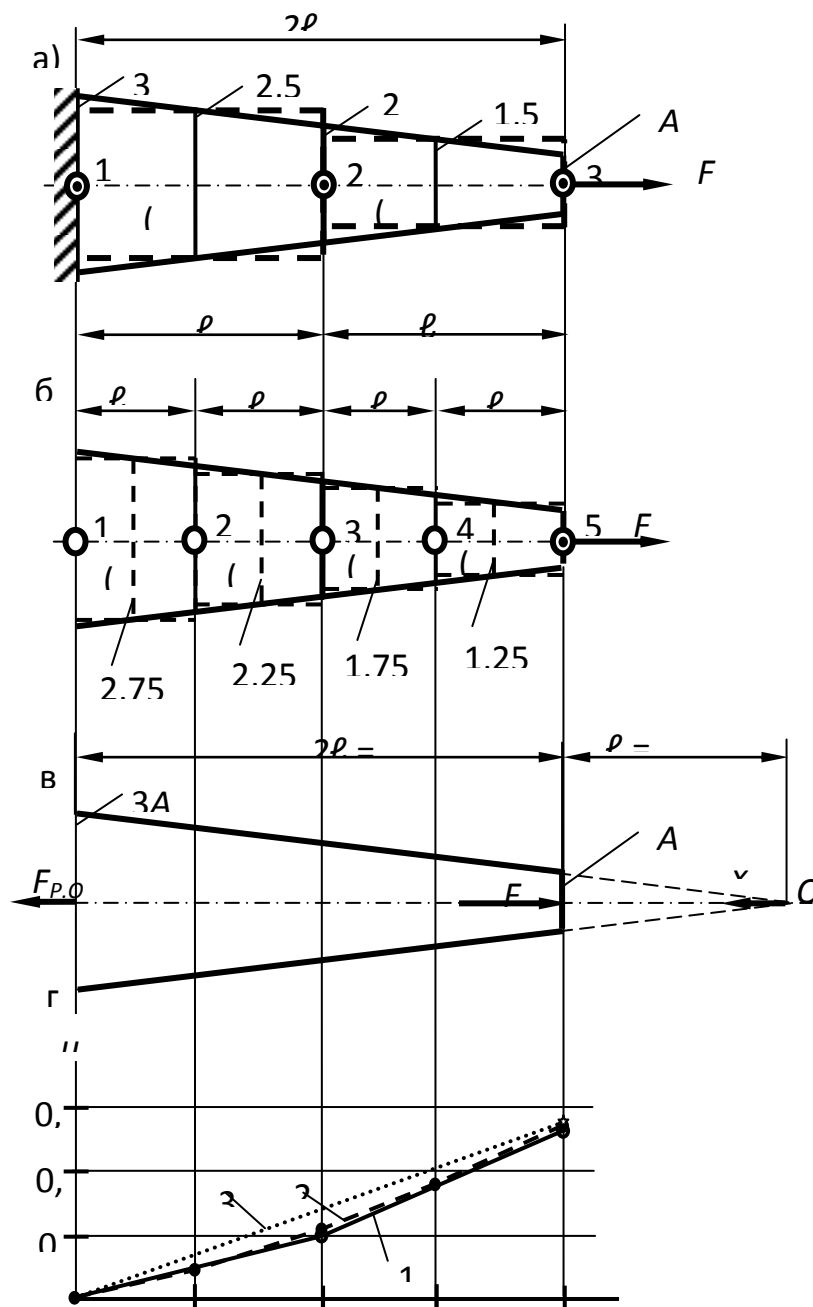
Разобьем стержень (рис.) на два конечных элемента длиной $\ell = 500$ мм и площадью поперечного сечения $2,5A = 250$ мм² и $1,5A = 150$ мм² соответственно.

По аналогии с [1] определяющее уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{2,5AE}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(2,5+1,5)AE}{\ell} & \frac{-1,5AE}{\ell} \\ 0 & \frac{-1,5AE}{\ell} & \frac{1,5AE}{\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \quad (1)$$

Для удобства вычислений (1) можно преобразовать к виду:

$$\frac{AE}{\ell} \begin{pmatrix} 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1,5 \\ 0 & -1,5 & 1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \quad (2)$$



1 – 2 конечных элемента; 2 – 4 конечных элемента; 3 – теоретическое.

а – двухэлементная модель; б – четырехэлементная

После подстановки численных значений (2) имеет вид:

$$4 \cdot 10^4 \begin{pmatrix} 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1,5 \\ 0 & -1,5 & 1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Поскольку $u_1 = 0$, определяющая система уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} 4u_2 - 1,5u_3 &= 0 \\ 4 \cdot 10^4(-1,5u_2 + 1,5u_3) &= 10^4 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Решая (4) получим $u_2 = 0,1$ мм, $u_3 = 0,267$ мм.

Выше и в дальнейшем для удобства вычислений силы выражаем в ньютонах, а длины в миллиметрах.

Рассмотрим тот же стержень, разделенный на четыре конечных элемента (рисунок) длиной 250 мм и площадью поперечного сечения 275 мм^2 , 225 мм^2 , 175 мм^2 и 125 мм^2 соответственно. Определяющее уравнение в этом случае примет вид:

$$\frac{AE}{\ell} \begin{pmatrix} 2,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2,75 + 2,25) & -2,25 & 0 & 0 \\ 0 & -2,25 & (2,25 + 1,75) & -1,75 & 0 \\ 0 & 0 & -1,75 & (1,75 + 1,25) & -1,25 \\ 0 & 0 & 0 & -1,25 & 1,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \quad (5)$$

Подставляя численные значения A , E , ℓ и F в формулу (5) получаем:

$$8 \cdot 10^4 \begin{pmatrix} 2,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,0 & -2,25 & 0 & 0 \\ 0 & -2,25 & 4,0 & -1,75 & 0 \\ 0 & 0 & -1,75 & 3,0 & -1,25 \\ 0 & 0 & 0 & -1,25 & 1,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10^4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Решение системы уравнений (6) дает следующие результаты: $u_1 = 0$; $u_2 = 0,0456$ мм; $u_3 = 0,1012$ мм; $u_4 = 0,1726$ мм; $u_5 = 0,2726$ мм.

Деформации внутри самих конечных элементов составят:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(1)} &= 0,1824 \cdot 10^{-3}; \\ \varepsilon^{(2)} &= 0,2224 \cdot 10^{-3}; \\ \varepsilon^{(3)} &= 0,2856 \cdot 10^{-3}; \\ \varepsilon^{(4)} &= 0,4000 \cdot 10^{-3},\end{aligned}$$

а напряжения

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)} &= 36,48 \text{ МПа}; \\ \sigma^{(2)} &= 44,48 \text{ МПа}; \\ \sigma^{(3)} &= 57,12 \text{ МПа}; \\ \sigma^{(4)} &= 80,00 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Указанные значения напряжений определялись из закона Гука при растяжении-сжатии, а представленные ниже значения напряжений в промежуточных узлах рассматривались как среднее между напряжениями в смежных конечных элементах:

$$\sigma_2 = 40,48 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = 50,80 \text{ МПа}; \quad \sigma_4 = 68,56 \text{ МПа}.$$

Незначительные расхождения с теоретическими значениями ($\sigma_2^T = 40 \text{ МПа}$; $\sigma_3^T = 50 \text{ МПа}$; $\sigma_4^T = 66,67 \text{ МПа}$) позволяют в данном случае не прибегать к теории сопряженной аппроксимации. Используемые выше надстрочные индексы в круглых скобках относят ту или иную величину к элементу, номер которого указан, а подстрочные индексы к узлу.

Анализ результатов расчета

Анализируя результаты расчета по двух- и четырехэлементной моделям видно, что с увеличением числа конечных элементов происходит небольшое увеличение абсолютного удлинения и при дальнейшем разбиении стержня на более короткие конечные элементы решение будет сходиться к теоретическому, которое приводится ниже.

В общем случае удлинение стержня, нагруженного, продольными силами, определяется по формуле:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dx}{EA} \quad (7)$$

Поскольку стержень изготовлен из одного материала и на него действует одна постоянная сила, формула(7) преобразуется к виду:

$$\Delta l = \frac{N}{E} \int_0^l \frac{dx}{A(x)} \quad (8)$$

Для удобства аналитического описания зависимости площади поперечного сечения A от координаты x , представляем стержень (рисунок 5.а) в виде (рисунок), приняв за

начало координат точку O . Очевидно, что площадь произвольного поперечного сечения стержня определяется как:

$$A(x) = 0,2x, \quad (9)$$

тогда полное удлинение стержня

$$\Delta l = \frac{N}{0,2E} \int_{l}^{3l} \frac{dx}{x} = \frac{N}{0,2E} (\ln 3l - \ln l) \quad (10)$$

что в численном выражении составляет:

$$\Delta l = \frac{10^4}{0,2 \cdot 2 \cdot 10^5} (\ln 1500 - \ln 500) = 2,5 \cdot 10^{-1} (7,31 - 6,21) = 0,275 \text{ мм}$$

Составляя результаты расчета методом конечных элементов с аналитическими видно, что с увеличением числа конечных элементов численное решение стремится к аналитическому, однако для полноты анализа необходимо экспериментальное подтверждение.

Очень часто макетные испытания крупных объектов проводят на десятикратно уменьшенных моделях. И в данном случае целесообразно провести испытание на растяжение конического стержня длиной 10 мм и сравнивать результаты эксперимента с результатом расчета по формуле (10). Повторно проводить расчеты методом конечных элементов необязательно, поскольку решение как уже было показано выше будет сходиться к теоретическому. При этом чем больше будет конечных элементов, а, следовательно, и число уравнений системы, тем решение будет точнее. Именно этим и объясняется широкое распространение МКЭ после активного развития вычислительной техники, позволяющей оперативно решать большие системы уравнений. До настоящего времени для решения систем линейных уравнений широко использовались метод исключения Гаусса и метод прогонки.

На основании выполненных расчетов и проведенного эксперимента можно заключить, что МКЭ дает результаты близкие к теоретическим решениям и имеет экспериментальное подтверждение, чем и объясняется его широкое применение. В настоящей работе рассматривается простейший случай решения одномерной задачи – растяжение-сжатие. Однако методом конечных элементов удобно решать задачи изгиба стержневых конструкций, а самое главное плоские, осесимметричные и объемные задачи. Помимо задач теории упругости методом конечных элементов можно решать тепловые задачи, задачи диффузии, фильтрации, гидродинамики, в том числе и нестационарные. Для решения последних может использоваться как чистый МКЭ, так и его сочетание с методом конечных разностей.

Порядок оформления работы

Две контрольные сводятся в единую работу, первая часть которой посвящена расчету стержня переменного сечения численным методом, а вторая аналитическим. Работа оформляется по аналогии с расчетно-графическими работами по сопротивлению материалов. Пояснительная записка содержит задание, введение, необходимые расчеты с пояснениями, расчетные схемы и графики (рисунок) с таблицами. В таблицах приводятся результаты расчета перемещений, напряжений и деформаций МКЭ, аналитически и экспериментально. Приводится оценка погрешности. Завершается пояснительная записка выводами и (или) основными результатами. На формате А 2 приводится основной графический материал (рисунок) и наиболее важные таблицы.

В качестве рассчитываемой модели для любого индивидуального задания предлагается использовать расчетную схему стержня переменного сечения как на рис. Значения величин A и l , соответствующие каждому варианту задания, приведены в таблице приложения. Значения допускаемого напряжения и модуля упругости всех трех предлагаемых материалов (стали, меди и алюминия), а также наименование конкретной марки материала студенты выбирают по своему усмотрению на основе справочной литературы. В случае невыполнения условия прочности следует произвести корректировку величины A .

Варианты индивидуальных заданий

l , мм	сталь			алюминий			медь		
	2А	3А	4А	2А	3А	4А	2А	3А	4А
400	1	2	3	4	5	6	7	8	9
420	10	11	12	13	14	15	16	17	18
440	19	20	21	22	23	24	25	26	27
460	28	29	30	31	32	33	34	35	36
480	37	38	39	40	41	42	43	44	45
500	46	47	48	49	50	51	52	53	54
520	55	56	57	58	59	60	61	62	63
540	64	65	66	67	68	69	70	71	72
560	73	74	75	76	77	78	79	80	81
580	82	83	84	85	86	87	88	89	90
600	91	92	93	94	95	96	97	98	99
620	100	101	102	103	104	105	106	107	108
640	106	110	111	112	113	114	115	116	117
660	118	119	120	121	122	123	124	125	126
680	127	128	129	130	131	132	133	134	135
700	136	137	138	139	140	141	142	143	144
720	145	146	147	148	149	150	151	152	153
740	154	155	156	157	158	159	160	161	162