

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Пекаревский Борис Владимирович  
Должность: Проректор по учебной и методической работе  
Дата подписания: 02.11.2023 13:15:16  
Уникальный программный ключ:  
3b89716a1076b80b2c167df0f27c09d01782ba84



**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт  
(технический университет)»  
(СПбГТИ(ТУ))**

**УТВЕРЖДАЮ**

**Проректор по учебной и  
методической работе**

**Б. В. Пекаревский**

**« 16 » февраля 2021 года**

**Рабочая программа дисциплины**

## **Введение в ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

Направление подготовки

**27.03.03 Системный анализ и управление**

Направленность программы бакалавриата

**Системный анализ в информационных технологиях**

Квалификация

**Бакалавр**

Форма обучения

**Заочная**

Факультет: **информационных технологий и управления**

Кафедра **математики**

Санкт-Петербург

2021

## ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ

Должность	Подпись	Ученое звание, фамилия, инициалы
Разработчик		А. В. Ржонсницкий

Рабочая программа дисциплины «Математика» обсуждена на заседании кафедры математики

Протокол от «04» 02 2021 № 6

Заведующий кафедрой

А. А. Груздков

Одобрено учебно-методической комиссией факультета информационных технологий и управления

протокол от «10» 02 2021 № 5

Председатель

В. В. Куркина

## СОГЛАСОВАНО

Руководитель направления подготовки «Системный анализ и управление»		Д. А. Краснобородько
Директор библиотеки		Т. Н. Старостенко
Начальник методического отдела учебно-методического управления		М.З.Труханович
Начальник УМУ		С. Н. Денисенко

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы .....	4
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы .....	5
3. Объем дисциплины.....	5
4. Содержание дисциплины.....	6
4.1. Разделы дисциплины и виды занятий .....	6
4.2. Формирование индикаторов достижения компетенций разделами дисциплины .....	6
4.3. Занятия лекционного типа .....	6
4.4. Занятия семинарского типа .....	7
4.5. Самостоятельная работа обучающихся.....	8
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине .....	8
6. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации .....	8
7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины .....	9
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины .....	9
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.....	9
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине .....	9
10.1. Информационные технологии.....	9
10.2. Программное обеспечение.....	10
10.3. Базы данных и информационные справочные системы .....	10
11. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине .....	10
12. Особенности освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья .....	10
Фонд оценочных средств .....	11

## 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Планируемые результаты обучения (дескрипторы)
<b>ОПК-8</b> Способен принимать научно обоснованные решения в области системного анализа и автоматического управления на основе знаний профильных разделов математики, физики, информатики, методов системного и функционального анализа, теории управления и теории знаний	<b>ОПК-8.3</b> Применение основных методов функционального анализа для решения прикладных задач	<b>Знать:</b> Основную терминологию и основные задачи функционального анализа (ЗН-1) <b>Уметь:</b> Решать простейшие задачи функционального анализа (У-1) <b>Владеть:</b> Методами решения основных задач функционального анализа (Н-1)

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы<sup>1</sup>

Дисциплина относится к дисциплинам обязательной части. Код дисциплины по учебному плану Б1.О.26. Дисциплина изучается на пятом курсе (9-10 семестр).

Дисциплина опирается на математические знания студентов, приобретенные ими при изучении алгебры и геометрии, математического анализа.

Знания, навыки и умения, приобретённые при изучении дисциплины «Введение в функциональный анализ», необходимы при постановке и решении прикладных задач дисциплин профессионального цикла при работе над ВКР, а также в научно-исследовательской работе.

## 3. Объем дисциплины

Вид учебной работы	Всего, академических часов
	Заочная форма обучения
<b>Общая трудоемкость дисциплины</b> (зачетных единиц/ академических часов)	4/144
<b>Контактная работа с преподавателем:</b>	<b>10</b>
занятия лекционного типа	4
занятия семинарского типа, в т.ч.	6
семинары, практические занятия	6
лабораторные работы	
курсовое проектирование (КР или КП)	..
КСР	
другие виды контактной работы	..
<b>Самостоятельная работа</b>	<b>125</b>
<b>Контроль</b>	<b>9</b>
<b>Форма текущего контроля</b> (Кр, реферат, РГР, эссе)	<b>3 Кр</b>
<b>Форма промежуточной аттестации</b> (Кр, КП, зачет, экзамен)	экзамен

<sup>1</sup> Место дисциплины будет учитываться при заполнении таблицы 1 в Приложении 1 (Фонд оценочных средств)

## 4. Содержание дисциплины

### 4.1. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Занятия лекционного типа, акад. часы	Занятия семинарского типа, акад. часы		Самостоятельная работа, акад. часы	Формируемые компетенции
			Семинары и/или практические занятия	Лабораторные работы		
1.	Метрические пространства	1	1		20	ОПК-8
2.	Нормированные пространства	1	1		20	ОПК-8
3.	Линейные операторы в нормированных пространствах	1	2		25	ОПК-8
4.	Гильбертовы пространства	1	2		40	ОПК-8
5.	Приложение функционального анализа к задачам оптимизации				20	ОПК-8
	<b>Итого</b>	<b>4</b>	<b>6</b>		<b>125</b>	

### 4.2 Формирование индикаторов достижения компетенций разделами дисциплины

№ п/п	Код индикаторов достижения компетенции	Наименование раздела дисциплины
1	ОПК-8.3	Метрические пространства
2	ОПК-8.3	Нормированные пространства
3	ОПК-8.3	Линейные операторы в нормированных пространствах
4	ОПК-8.3	Гильбертовы пространства
5	ОПК-8.3	Приложение функционального анализа к задачам оптимизации

### 4.3. Занятия лекционного типа

№ раздела дисциплины	Наименование темы и краткое содержание занятия	Объем, акад. часы	Инновационная форма
1	Предмет изучения функционального анализа, его отличие от математического анализа. Метрические пространства. Определение. Изометрия. Шар в метрическом пространстве. Открытые и замкнутые множества. Внутренность и замыкание множества. Сходимость последовательности в метрическом пространстве. Непрерывность отображений метрических пространств. Фундаментальная последовательность. Полные метрические пространства (теорема о пополнении). Полнота подпространства. Теорема о	1	Разбор конкретных ситуаций

№ раздела дисциплины	Наименование темы и краткое содержание занятия	Объем, акад. часы	Инновационная форма
	сжимающем отображении		
2	Нормированные пространства. Определение и связь с метрическими пространствами. Банаховы пространства. Понятие эквивалентности норм. Теорема об эквивалентности всех норм конечномерного нормированного пространства.	1	
3	Линейные операторы в нормированных пространствах. Необходимое и достаточное условие непрерывности линейного оператора. Норма оператора. Непрерывность линейного оператора в конечномерных нормированных пространствах	1	
4	Множества всюду плотные в нормированном пространстве. Сепарабельные пространства. Задача о наилучшем приближении. Гильбертовы пространства. Ортогональный базис. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Теорема Фишера - Рисса	1	
<b>ИТОГО</b>		<b>4</b>	

#### 4.4 Занятия семинарского типа

##### 4.4.1. Семинары, практические занятия

№ раздела дисциплины	Наименование темы и краткое содержание занятия	Объем, акад. часы	Инновационная форма
1	Определение и примеры метрических пространств. Шары открытые и замкнутые множества для каждого из приведенных примеров	1	Разбор конкретных ситуаций
2	Основные нормированные пространства. Сходимость в этих пространствах, их полнота. Полнота подпространств	1	-
3	Линейные операторы в нормированных пространствах. Оценка нормы линейного оператора. Примеры вычисления нормы	2	Групповая дискуссия
4	Множества всюду плотные в основных нормированных пространствах. Примеры решения задач о наилучшем приближении. Полиномы Чебышева. Гильбертовы пространства. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Примеры ортогональных базисов. Разложение в ряд Фурье. Частичная сумма ряда Фурье как элемент наилучшего приближения. Расстояние до подпространства	2	
<b>ИТОГО</b>		<b>6</b>	

##### 4.4.2. Лабораторные занятия

№ раздела дисциплины	Наименование темы и краткое содержание занятия	Объем, акад. часы	Примечание
	не предусмотрены		

#### 4.5. Самостоятельная работа обучающихся

№ раздела дисциплины	Перечень вопросов для самостоятельного изучения	Объем, акад. часы	Форма контроля
1, 2	Метрические и нормированные пространства. Основные понятия. Поиск расстояний в метрических и нормированных пространствах. Метод итераций для решения различных задач. Выполнение Кр.	25	Кр №1, вопросы к экзамену
2	Сходимость в нормированном пространстве. Топология нормированных пространств.	15	Кр №2, вопросы к экзамену
3	Линейные отображения в нормированных пространствах. Непрерывность. Оценка нормы отображения.	25	Кр №3, вопросы к экзамену
4	Элемент наилучшего приближения в Гильбертовом пространстве. Расстояние до подпространства. Ортогональное дополнение.	40	Кр №3, вопросы к экзамену
5	Исследование функционала на экстремум. Применение в прикладных задачах.	20	Кр №3, вопросы к экзамену
<b>ИТОГО</b>		<b>125</b>	

#### 5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Методические указания для обучающихся по организации самостоятельной работы по дисциплине, включая перечень тем самостоятельной работы, формы текущего контроля по дисциплине и требования к их выполнению размещены в электронной информационно-образовательной среде СПбГИ(ТУ) на сайте: <http://media.technolog.edu.ru>

#### 6. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Своевременное выполнение обучающимся мероприятий текущего контроля позволяет превысить (достигнуть) пороговый уровень («удовлетворительно») освоения предусмотренных элементов компетенций.

Результаты дисциплины считаются достигнутыми, если для всех элементов компетенций превышен (достигнут) пороговый уровень освоения компетенции на данном этапе.

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме экзамена. К сдаче экзамена допускаются студенты, выполнившие все формы текущего контроля.

Экзамен предусматривают выборочную проверку освоения предусмотренных элементов компетенций и комплектуются вопросами (заданиями) двух видов: теоретический вопрос (для проверки знаний) и практическое задание (для проверки умений и навыков).

При сдаче экзамена, студент получает один вопрос из перечня вопросов и одно практическое задание, время подготовки студента к устному ответу — до 45 мин.

Фонд оценочных средств по дисциплине представлен в Приложении № 1.



## **7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **а) печатные издания:**

1. Треногин, В.А. Функциональный анализ: Учебное пособие / В.А. Треногин - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.-488 с.
2. Дерр, В.Я. Функциональный анализ: лекции и упражнения: Учебное пособие / В.Я. Дерр – М.: КНОРУС, 2013.-464 с.
3. Федоров, В.М. Курс функционального анализа: Учебник для вузов / В.М. Федоров – СПб.: Лань, 2005.-351 с.
4. Демидович, Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: Учебное пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова – СПб.: Лань, 2008.-400 с.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

учебный план, РПД и учебно-методические материалы: <http://media.technolog.edu.ru>  
электронно-библиотечные системы:

«Электронный читальный зал – БиблиоТех» <https://technolog.bibliotech.ru/>;  
«Лань» <https://e.lanbook.com/books/>.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Все виды занятий по дисциплине «Введение в функциональный анализ» проводятся в соответствии с требованиями следующих СТП:

СТП СПбГТИ 040-02. КС УКДВ. Виды учебных занятий. Лекция. Общие требования;

СТО СПбГТИ 018-2014. КС УКДВ. Виды учебных занятий. Семинары и практические занятия. Общие требования к организации и проведению.

СТП СПбГТИ 048-2009. КС УКВД. Виды учебных занятий. Самостоятельная планируемая работа студентов. Общие требования к организации и проведению.

СТП СПбГТИ 016-2015. КС УКВД. Порядок проведения зачетов и экзаменов.

Планирование времени, необходимого на изучение данной дисциплины, лучше всего осуществлять на весь семестр, предусматривая при этом регулярное повторение пройденного материала.

Основными условиями правильной организации учебного процесса для студентов является:

- плановость в организации учебной работы;
- серьезное отношение к изучению материала;
- постоянный самоконтроль.

На занятия студент должен приходить, имея багаж знаний и вопросов по уже изученному материалу.

## **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

### **10.1. Информационные технологии**

В учебном процессе по данной дисциплине предусмотрено использование информационных технологий:

чтение лекций с использованием слайд-презентаций;  
взаимодействие с обучающимися посредством ЭОИС.

## **10.2. Программное обеспечение**

При выполнении РГР студенты используют пакет прикладных программ Mathcad.

## **10.3. Базы данных и информационные справочные системы**

[wolframalpha.com/examples/mathematics](http://wolframalpha.com/examples/mathematics)

## **11. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Для ведения лекционных и практических занятий используются аудитории кафедры математики.

Для проведения лабораторных занятий используется компьютерный класс, оборудованный 16 персональными компьютерами, объединенными в сеть.

## **12. Особенности освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья**

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями учебный процесс осуществляется в соответствии с Положением об организации учебного процесса для обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья СПбГТИ(ТУ), утвержденным ректором 28.08.2014 г.

**Фонд оценочных средств**  
для проведения промежуточной аттестации по  
дисциплине «Введение в функциональный анализ»

**1. Перечень компетенций и этапов их формирования.**

Компетенции		
Индекс	Формулировка <sup>2</sup>	Этап формирования <sup>3</sup>
ОПК-8	<b>Способен принимать научно обоснованные решения в области системного анализа и автоматического управления на основе знаний</b> профильных разделов математики, физики, информатики, методов системного и функционального анализа, теории управления и теории знаний	промежуточный

<sup>2</sup> **жирным шрифтом** выделена та часть компетенции, которая формируется в ходе изучения данной дисциплины (если компетенция осваивается полностью, то фрагменты)

<sup>3</sup> этап формирования компетенции выбирается по п.2 РПД и учебному плану (начальный – если нет предшествующих дисциплин, итоговый – если нет последующих дисциплин (или компетенция не формируется в ходе практики или ГИА), промежуточный - все другие.)

## 2. Показатели и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования, шкала оценивания

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Показатели сформированности (дескрипторы)	Критерий оценивания	Уровни сформированности (описание выраженности дескрипторов)		
			«удовлетворительно» (пороговый)	«хорошо» (средний)	«отлично» (высокий)
<b>ОПК-8.3</b> Применение основных методов функционального анализа для решения прикладных задач	Знает основную терминологию и основные задачи функционального анализа (ЗН-1)	Правильный ответ на экзаменационный вопрос, правильное решение задачи на экзамене, выполнение РГР № 1--5.	Основные определения и формулировки основных задач воспроизводит с некоторой помощью преподавателя	Знает основные определения и формулировки основных задач, но недостаточно хорошо понимает их сущность и причинно-следственные взаимосвязи	Знает основную терминологию и основные задачи функционального анализа.
	Умеет решать простейшие задачи функционального анализа (У-1)	Правильный ответ на экзаменационный вопрос, правильное решение задачи на экзамене, выполнение РГР № 1--5.	Решает задачи с некоторой помощью преподавателя.	Умеет решать задачи, но допускает ошибки.	Умеет решать простейшие задачи функционального анализа.
	Владеет методами решения основных задач функционального анализа (Н-1)	Правильный ответ на экзаменационный вопрос, правильное решение задачи на экзамене, выполнение РГР № 1--5.	Методы решения основных задач функционального анализа воспроизводит с некоторой помощью преподавателя	Владеет методами решения основных задач функционального анализа, но недостаточно хорошо понимает их сущность и причинно-следственные взаимосвязи, упускает некоторые элементы обоснования решения.	Владеет методами решения основных задач функционального анализа.

Шкала оценивания соответствует СТО СПбГТИ(ТУ):  
по дисциплине промежуточная аттестация проводится в форме экзамена шкала оценивания – балльная.

### 3. Типовые контрольные задания для проведения промежуточной аттестации

#### 3.1 Вопросы для оценки знаний, умений и навыков, сформированных у студента по компетенциям ОПК-8.3

##### Вопросы к экзамену


1. Предмет изучения функционального анализа, его отличие от математического анализа. Метрические пространства. Определение. Изометрия. Шар в метрическом пространстве. Открытые и замкнутые множества.
2. Внутренность и замыкание множества. Сходимость последовательности в метрическом пространстве. Непрерывность отображений метрических пространств. Фундаментальная последовательность. Полные метрические пространства (теорема о пополнении). Полнота подпространства.
3. Теорема о сжимающем отображении.
4. Нормированные пространства. Определение и связь с метрическими пространствами. Банаховы пространства. Понятие эквивалентности норм. Теорема об эквивалентности всех норм конечномерного нормированного пространства.
5. Линейные операторы в нормированных пространствах. Необходимое и достаточное условие непрерывности линейного оператора. Норма оператора. Непрерывность линейного оператора в конечномерных нормированных пространствах.
6. Множества всюду плотные в нормированном пространстве. Сепарабельные пространства. Задача о наилучшем приближении.
7. Гильбертовы пространства. Ортогональный базис. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Теорема Фишера - Рисса
8. Приложение функционального анализа к задачам оптимизации. Дифференцируемость функционала по Фреше. Дифференциал Фреше интегрального функционала.
9. Понятие экстремума для функционала. Необходимое условие экстремума (аналог теоремы Ферма). Поиск точек подозрительных на экстремум для интегрального функционала. Уравнение Эйлера.
10. Понятие о методе Ритца.

К экзамену допускаются студенты, выполнившие все формы текущего контроля. При сдаче экзамена, студент получает один вопрос из перечня, приведенного выше и практическое задание аналогичное заданиям, приведённым ниже.

Время подготовки студента к устному ответу на вопросы - до 45 мин.

### 3.2 Практические задания к экзамену

- Докажите, что  $d(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1 - z_2|, & \text{при } \arg z_1 = \arg z_2, \\ |z_1| + |z_2|, & \text{при } \arg z_1 \neq \arg z_2. \end{cases}$  является метрикой на множестве  $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}\}$ .
- Докажите, что  $d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = y, \\ 1, & \text{при } x \neq y. \end{cases}$  является метрикой. Опишите шар радиуса 2 и укажите все его центры.
- Докажите, что  $d(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$ , является метрикой на множестве  $\mathbb{R}$ . Докажите, что это пространство не является полным. Найдите его пополнение.
- Исследуйте последовательность  $\mathbb{Q}$  чисел:  $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ . Дайте трактовку полученным результатам.
- Докажите, что а)  $d(P, Q) = \max_{x \in [0;1]} |P(x) - Q(x)|$ ; б)  $d(P, Q) = \int_0^1 |P(x) - Q(x)| dx$ ; в)  $d(P, Q) = \sum_i |c_i|$ , при  $P(x) - Q(x) = \sum_i c_i x^i$  являются метриками на множестве многочленов. Являются ли полученные метрические пространства полными?
- Докажите, что уравнение  $y(x) = 0,9 \int_0^1 \sqrt{x+t} \cos y(t) dt$  имеет единственное решение в классе  $C[0; 1]$ .
- Исследуйте сходимость последовательности  $\{f_n\}$  в пространстве  $X$ .

$\{f_n\}$	$X$
$\left\{ \frac{nx}{(1+nx)^2} \right\}$	$C[0; 1]$
$\left\{ \frac{nx}{(1+nx)^2} \right\}$	$L[0; +\infty]$
	$l^{3/2}$

- Проверьте, является ли множество  $M$  ограниченным, замкнутым, открытым в пространстве  $X$ ?

$M$	$X$
$\left\{ f \mid \int_a^b f(x) dx = 0 \right\}$	$C[a; b]$
$\left\{ f \mid  f_k  \leq 1/k \right\}$	$l^{5/3}$
$\{f \mid f(a) = f'(a) = 0\}$	$C^1[a; b]$

- Ортогонализируйте систему функций  $1, x, x^2, x^3, x^4$  в пространствах  $L^2[-1; 1], L^2([-1; 1], dx/\sqrt{1-x^2}), L^2([-\infty; +\infty], e^{-x^2/2} dx)$ . В указанных пространствах для функции  $|x|$  найдите элемент наилучшего приближения из

подпространства, определенного рассмотренной системой функций. Сравните полученные результаты.

10. Разложите функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in [-1; 0), \\ 1, & \text{при } x \in [0; 1] \end{cases}$$

в ряд Фурье по ортогональному базису, состоящему из полиномов Лежандра. Для полученного разложения напишите равенство Парсеваля.

11. Найдите приближенное решение краевой задачи

$$y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0, y(-1) = y(1) = 0$$

методом Рунге.

### 3.3 Состав контрольных работ

#### Контрольная работа № 1

##### Задание №1

Дайте определение нормированных пространств  $C[a;b]$  и  $L^1[a;b]$ . Найдите расстояние между функциями  $f(x)$  и  $g(x)$  в этих пространствах.

№ варианта	$a$	$b$	$f(x)$	$g(x)$
1	1	4	$3x^3 - x^2 - 3x + 12$	$3x^3 - 7x + 11$
2	1	4	$x^4 - 15x^2 + 43x - 23$	$x^4 - 2x^3 + 7x - 4$
3	1	4	$2x^4 + 5x^3 - 3x + 9$	$2x^4 + 5x^3 - x^2 + 3x - 1$
4	1	5	$x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 61$	$x^4 - x^3 - 20x^2 + 65x + 11$
5	1	4	$x^3 + 5x^2 - x - 4$	$x^3 + 5x^2 - 3x - 7$
6	2	4	$6x^3 - 2x^2 - 6x + 21$	$6x^3 - 14x + 19$
7	1	2	$4x^4 - 60x^2 + 172x - 95$	$4x^4 - 8x^3 + 28x - 19$
8	-1	-2	$-4x^4 - 10x^3 + 6x - 20$	$-4x^4 - 10x^3 + 2x^2 - 6x$
9	0	2	$2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 14x + 123$	$2x^4 - 2x^3 - 40x^2 + 130x + 23$
10	0	2	$5x^3 + 25x^2 - 5x - 225$	$5x^3 + 25x^2 - 15x - 37$
11	1	3	$9x^3 - 3x^2 - 9x + 33$	$9x^3 - 21x + 30$
12	-1	0	$-2x^4 + 30x^2 - 86x + 46$	$-2x^4 + 4x^3 - 14x + 8$
13	-1	1	$6x^4 + 15x^3 - 9x + 31$	$6x^4 + 15x^3 - 3x^2 + 9x + 1$
14	1	3	$3x^4 - 9x^3 + 3x^2 - 21x + 180$	$3x^4 - 3x^3 - 60x^2 + 195x + 30$
15	-1	2	$2x^3 + 10x^2 - 2x - 4$	$2x^3 + 10x^2 - 6x - 10$
16	0	2	$12x^3 - 4x^2 - 12x + 46$	$12x^3 - 28x + 42$
17	-3	-5	$-x^4 + 15x^2 - 43x + 21$	$-x^4 + 2x^3 - 7x + 2$
18	0	1	$8x^4 + 20x^3 - 12x + 38$	$8x^4 + 20x^3 - 4x^2 + 12x - 2$
19	-6	-4	$-x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x - 64$	$-x^4 + x^3 + 20x^2 - 65x - 14$
20	-2	2	$-2x^3 - 10x^2 + 2x + 6$	$-2x^3 - 10x^2 + 6x + 12$

##### Задание №2

Преобразуйте данное уравнение к виду  $x=f(x)$ , в котором  $f(x)$  является сжимающим отображением. Укажите, в каком полном метрическом пространстве задано  $f(x)$ . С помощью метода последовательных приближений найдите корень уравнения в этом пространстве. Сравните полученный результат с точным решением уравнения.



№ варианта	Уравнение
1	$x^2-11x+17=0$
2	$x^2-12x+19=0$
3	$x^2-13x+21=0$
4	$x^2-14x+23=0$
5	$x^2-15x+25=0$
6	$x^2-16x+27=0$
7	$x^2-17x+29=0$
8	$x^2-18x+31=0$
9	$x^2-19x+33=0$
10	$x^2-20x+35=0$
11	$x^2-21x+37=0$
12	$x^2-22x+39=0$
13	$x^2-23x+41=0$
14	$x^2-24x+43=0$
15	$x^2-25x+45=0$
16	$x^2-26x+47=0$
17	$x^2-27x+49=0$
18	$x^2-28x+51=0$
19	$x^2-29x+53=0$
20	$x^2-30x+55=0$

### Задание №3

Преобразуйте данную систему к виду  $\begin{cases} x = f(x, y), \\ y = g(x, y), \end{cases}$  в котором  $(f(x, y), g(x, y))$  является сжимающим отображением. Укажите, в каком полном метрическом пространстве задано это отображение. С помощью метода последовательных приближений найдите решение системы в этом пространстве. Сделайте проверку.

№ варианта	Система
1	$\begin{cases} \sin(x+2) - 2y = 0.2 \\ x + \cos\left(\frac{y}{2}\right) = 1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \cos(x-1) + 3y = 1.5 \\ 2x - \cos(y) = 4 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \sin(x-1) - 3y = 0.6 \\ x + \cos\left(\frac{y}{3}\right) = 2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \cos(x+1) - 2y = 1.2 \\ 4x - \cos(2y) = 2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2} + 1\right) - y = 0.2 \\ 2x + \cos(y) = 1.2 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \cos(2x) + 3y = 4.5 \\ 2x - \cos\left(\frac{y}{2}\right) = 4 \end{cases}$

№ варианта	Система
7	$\begin{cases} \sin(x-1) - 4y = 0.8 \\ x - \cos\left(\frac{y}{2}\right) = 2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \cos(x+3) + 3y = 1.5 \\ x - \cos\left(\frac{y}{3}\right) = 4 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \sin\left(\frac{x}{3}\right) - 2y = 1.2 \\ 3x + \cos\left(\frac{y}{2}\right) = 0.3 \end{cases}$
10	$\begin{cases} \cos\left(\frac{x}{3}\right) + 2y = 1 \\ 2x - \sin(y) = 4 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \sin(2x) - 4y = 0.4 \\ 2x + \cos\left(\frac{y}{3}\right) = 1.2 \end{cases}$
12	$\begin{cases} \sin(x-1) - 2y = 1.4 \\ 2x - \cos(y) = 1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} \sin(x-2) - 4y = 0.6 \\ 5x - \cos(2y) = 0.5 \end{cases}$
14	$\begin{cases} \sin(x+2) + 4y = 1.6 \\ 2x + \sin(y) = 0.8 \end{cases}$
15	$\begin{cases} \sin(x/3) - y/2 = 0.1 \\ 2x + \cos\left(\frac{y}{2}\right) = 1.6 \end{cases}$
16	$\begin{cases} \cos(2x) + 3y = 1.5 \\ 2x - \cos\left(\frac{y}{3}\right) = 0.6 \end{cases}$
17	$\begin{cases} \sin(2x+1) - 4y = 0.8 \\ x - 2\cos\left(\frac{y}{3}\right) = 1 \end{cases}$
18	$\begin{cases} \cos(2x-1) + 3y = 1.5 \\ 4x - \sin(3y) = 4 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 3\sin(x+2) - 5y = 0.5 \\ x - \cos\left(\frac{y}{2}\right) = 1.2 \end{cases}$
20	$\begin{cases} \cos(x+1) + 2y = 1 \\ 2x + \cos(y) = 6 \end{cases}$

### Контрольная работа № 2

#### Задание №1

Проверьте, сходится ли заданная последовательность  $x_n$  точек нормированного пространства  $X$  к точке  $a$ , если выполнены следующие условия.

Вариант	$X$	$x_n$	$a$
1	$C[0;8]$	$\left(\frac{t}{8}\right)^n - \left(\frac{t}{8}\right)^{2n} + t$	$t$

2	$l_2$	$\left( \underbrace{\frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{n^2}}_{n^2}, n, 0, 0, \dots \right)$	$(0, 0, 0, \dots)$
3	$L_2[0;2]$	$1/(1+nt)$	0
4	$C[1;2]$	$n\left(\sqrt{1/n+t}-\sqrt{t}\right)$	$1/2\sqrt{t}$
5	$l_\infty$	$\left( \underbrace{\left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^n, \dots, \left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^n}_n, 0, 0, \dots \right)$	$(e^{-1/2}, e^{-1/2}, \dots)$
6	$L_1[0;1]$	$e^{n(t-1)}$	0
7	$C[-3;3]$	$\sqrt{t^2+1/n^3}$	$ t $
8	$l_1$	$\left( \underbrace{\sin \frac{1}{2^n}, \dots, \sin \frac{1}{2^n}}_{n^2}, 0, 0, \dots \right)$	$(0, 0, 0, \dots)$
9	$L_2[0;3]$	$(\sin nt)/n^2+t^3$	$t^3$
10	$C[0;2]$	$(tn^2+1)/(n^2+t)$	$t$

### Задание №2

Найдите предел последовательности  $x_n$  в нормированном пространстве  $X$ , если он существует.

Вариант	$X$	$x_n$
1	$l_1$	$\left( \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n^2}{n^2+1}, 0, 0, \dots \right)$
2	$l_2$	$\left( \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, (\sin n^2)/n, (\sin n^3)/n^2, \dots, (\sin n^k)/n^{k-1}, \dots \right)$
3	$L_2[-1;2]$	$(t/2)^n + \sin t$
4	$l_\infty$	$(1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, 0, 0, \dots)$
5	$l_\infty$	$\left( \underbrace{\operatorname{tg}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \dots, \operatorname{tg}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_n, 0, 0, \dots \right)$
6	$l_3$	$\left( \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_n, 0, 0, \dots \right)$
7	$l_2$	$\left( \underbrace{\sin \frac{1}{n}, \dots, \sin \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \dots \right)$

8	$c_0$	$\left( \underbrace{\left( \frac{n+2}{n} \right)^2, \dots, \left( \frac{n+2}{n} \right)^2}_n, 0, 0, \dots \right)$
9	$l_\infty$	$\left( \operatorname{tg} \left( \frac{1}{n} \right), \operatorname{tg} \left( \frac{1}{n^2} \right), \dots, \operatorname{tg} \left( \frac{1}{n^k} \right), \dots \right)$
10	$l_1$	$\left( \underbrace{\frac{\sin 3^n}{n^2}, \dots, \frac{\sin 3^n}{n^2}}_n, 0, 0, \dots \right)$

### Задание №3

Является ли данное множество  $M$  открытым, замкнутым, ограниченным в пространстве  $X$ ?  
Найдите его замыкание, внутренние и граничные точки.

Вариант	$X$	$M$
1	$l_1$	$\left\{ x \mid  x_k  \leq \frac{1}{k} \right\}$
2	$l_2$	$\{ x \mid x_k > 0 \}$
3	$l_2$	$\left\{ x \mid  x_k  < \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} \right\}$
4	$l_\infty$	$\{ x \mid \exists n : \forall k > n \ x_k = 0 \}$
5	$l_2$	$\left\{ x \mid \sum_{k=1}^{\infty}  x_k  < 1 \right\}$
6	$C[a; b]$	$\{ x \in C^{(1)}[a; b] \mid x(a) = 0 \}$
7	$C[a; b]$	$\{ x \mid x(a) = x(b) \}$
8	$C[a; b]$	$\left\{ x \mid \int_a^b x(t) dt = 0 \right\}$
9	$C[a; b]$	$\{ x \mid x(a) > 0 \}$
10	$C[a; b]$	$\{ x \in C^{(1)}[a; b] \mid x(a) = x'(a) \}$

### Контрольная работа № 3

#### Задание №1

Докажите, что отображение  $A: X \rightarrow Y$  является линейным оператором. Проверьте, является ли оператор непрерывным.

№ Варианта	Пространство		Оператор A
	X	Y	
1	$C[0; 1]$	$\mathbb{R}$	$Af = f(1)$

№ Варианта	Пространство		Оператор А
	X	Y	
2	$C^1[a; b]$ с нормой $C[a; b]$	$C[a; b]$	$Af = f'$
3	$L^2[-1; 2]$	$L^2[0; 3]$	$(Af)(y) = \int_{-1}^2 (2x + y - y^2) f(x) dx$
4	$C^1[0; 4]$	$C^1[0; 3]$	$(Af)(x) = (x - x^2)f(x)$
5	$L^4[0; 1]$	$L^4[0; 1]$	$(Af)(x) = x5^x f(x^2)$
6	$L^1[0; 1]$	$\mathbb{R}$	$Af = f(1)$
7	$C^1[a; b]$	$C[a; b]$	$Af = f'$
8	$l^4$	$l^4$	$\{(Af)_n\} = \left\{ \frac{3n^2 - 2n - 1}{n^2 + 1} \cdot f_{2n} \right\}$
9	$L^1[-1; 1]$	$L^1[-1; 1]$	$(Af)(x) = f(x) \cos \pi x$
10	$l^2$	$l^2$	$\{(Af)_k\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(k+n)} f_n \right\}$
11	$C[-1; 2]$	$C[0; 3]$	$(Af)(y) = \int_{-1}^2 (2x + y - y^2) f(x) dx$
12	$l^1$	$\mathbb{R}$	$Af = 239 \cdot f_2$
13	$l^{\infty}$	$l^{\infty}$	$\{(Af)_k\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(k+n)} f_n \right\}$
14	$C\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$	$C\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	$(Af)(y) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) \cos(x + y) dx$
15	$L^2[0; 1]$	$\mathbb{R}$	$Af = f(0)$
16	$L^1[0; 1]$	$L^1[0; 1]$	$(Af)(x) = x^2 \sin x f(x^3)$
17	$l^2$	$l^2$	$\{(Af)_k\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{kn} \right\}$
18	$L^2\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$	$L^2\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	$(Af)(y) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) \cos(x + y) dx$
19	$l^{\infty}$	$l^{\infty}$	$\{(Af)_k\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{kn} \right\}$

№ Варианта	Пространство		Оператор А
	X	Y	
20	$L^2[0; 2]$	$L^2\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	$(Af)(y) = \int_0^2 (1-x)f(x) \cos y \, dx$

### Задание №2

Для функции  $f(x) \in L^2([a; b], p(x)dx)$  известно, что  $\int_a^b f(x) \varphi_i(x) p(x) dx = d_i$  при  $i=1;2;3$ .

Найдите наименьшее возможное значение  $\int_a^b f^2(x) p(x) dx$ .

№ варианта	a	b	p(x)	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
1	-1	1	1	1	x	$x^2$	30	-20	22
2	$-\pi$	$\pi$	$\frac{1}{\pi}$	$3 + \sin x$	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	6	0	4
3	-1	1	$\frac{1}{\pi \cdot \sqrt{1-x^2}}$	1	x	$x^2$	1	-3	$\frac{3}{4}$
4	-1	1	1	1	x	$x^2$	60	-10	24
5	$-\pi$	$\pi$	$\frac{1}{\pi}$	$1 + \cos x$	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	16	7	5
6	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$	1	x	$x^2$	1	-3	5
7	-1	1	1	1	x	$x^2$	30	-10	18
8	$-\pi$	$\pi$	$\frac{1}{\pi}$	1	$\sin x$	$\cos^2 x$	4	-2	5
9	-1	1	$\frac{1}{\pi \cdot \sqrt{1-x^2}}$	1	x	$x^2$	1	-1	1
10	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$	1	x	$x^2$	3	-2	5

### Задание №3

Для интегрального функционала  $J[y]$  найдите точки (функции)  $y(x)$  подозрительные на экстремум.

№ варианта	Функционал	Граничные условия
1	$\int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx$	$y(-1) = 1, y(0) = 0$
2	$\int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2) dx$	$y(1) = 1, y(2) = 0$
3	$\int_0^\pi (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx$	$y(0) = 0, y(\pi) = 0$

№ варианта	Функционал	Граничные условия
4	$\int_0^1 (y'^2 - y^2 - y)e^{2x} dx$	$y(0) = 0, y(1) = e^{-1}$
5	$\int_0^1 (2y e^x + y'^2 + y^2) dx$	$y(0) = 0, y(1) = e$
6	$\int_0^1 yy'^2 dx$	$y(0) = 1, y(1) = \sqrt[3]{4}$
7	$\int_{-1}^1 (y'^2 - 2xy) dx$	$y(-1) = -1, y(1) = 1$
8	$\int_0^{\pi/2} (4y \sin x + y'^2 - y^2) dx$	$y(0) = 1, y(\pi/2) = 0$
9	$\int_0^1 (12y e^x + y'^2 + 4y^2) dx$	$y(0) = 2e, y(1) = e$
10	$\int_0^1 (y'^2 + 3y^2 - y)e^{2x} dx$	$y(0) = 0, y(1) = e^{-3}$
11	$\int_{-1}^e (xy'^2 + yy') dx$	$y(1) = 0, y(e) = 1$
12	$\int_{-1}^0 (y'^2 - 2xy) dx$	$y(-1) = 0, y(1) = 2$
13	$\int_1^e (y'^2 + 2y \ln x) dx$	$y(1) = 0, y(e) = e^2$
14	$\int_0^1 (24y e^{2x} + y'^2 + 9y^2) dx$	$y(0) = 6e, y(1) = e$
15	$\int_0^{\pi/2} (2y \sin 2x + y'^2 - y^2) dx$	$y(0) = 0, y(\pi/2) = 0$
16	$\int_0^1 (2y(x+1) + y'^2 + y^2) dx$	$y(0) = 1, y(1) = 2$
17	$\int_0^1 (y'^2 - 4y^2 + 2y)e^{-4x} dx$	$y(0) = 0, y(1) = e^2$
18	$\int_0^{\pi/2} (2y(x^2 + x + 1) + y'^2 - 4y^2) dx$	$y(0) = 0, y(\pi/2) = 0$
19	$\int_0^1 (2y e^x + y'^2 + y^2) dx$	$y(0) = e, y(1) = 30e$
20	$\int_0^{\pi/4} (2y \cos x + y'^2 - 4y^2) dx$	$y(0) = 0, y(\pi/4) = 1$

**4. Методические материалы для определения процедур оценивания знаний,**

**умений, навыков, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в соответствии с требованиями СПб

СТО СПбГТИ(ТУ) 016-2015. КС УКВД. Порядок проведения зачетов и экзаменов.